

Der Goldene Schnitt

Mathematische Erkundungsarbeit

Anzahl der Seiten: 5

1. Einleitung

In dieser Arbeit geht es um den Goldenen Schnitt. Der Goldene Schnitt ist eine der berühmtesten Zahlen der Mathematik. Er kommt in der Natur vor, in der Kunst, in der Architektur und sogar in der Musik. Ich habe dieses Thema gewählt, weil ich es sehr interessant finde und weil ich schon oft davon gehört habe.

Im Folgenden werde ich zuerst erklären, was der Goldene Schnitt ist und wie man ihn berechnet. Danach zeige ich den Zusammenhang mit den Fibonacci-Zahlen. Zum Schluss stelle ich einige Beispiele aus der Natur und der Kunst vor.

2. Was ist der Goldene Schnitt?

Eine Strecke ist im Goldenen Schnitt geteilt, wenn sich die ganze Strecke zum größeren Teil genauso verhält wie der größere Teil zum kleineren Teil. Wenn man die beiden Teile a und b nennt, bedeutet das:

$$(a + b) / a = a / b$$

Jetzt setzt man $x = a/b$. Dann bekommt man:

$$1 + 1/x = x$$

Multipliziert man mit x, ergibt sich $x^2 = x + 1$, also $x^2 - x - 1 = 0$. Das ist eine quadratische Gleichung, die man mit der Mitternachtsformel lösen kann:

$$x = (1 + \sqrt{5}) / 2 = 1.618033988749895$$

Die zweite Lösung ist negativ und wird nicht gebraucht. Die Zahl 1.618033988749895 nennt man Phi. Phi ist eine irrationale Zahl, das heißt sie hat unendlich viele Nachkommastellen, die sich nicht wiederholen.

Eine interessante Eigenschaft ist, dass $1/\text{Phi} = 0.618033988749895$ ist. Die Nachkommastellen sind also dieselben. Das liegt daran, dass Phi die Gleichung $x^2 = x + 1$ erfüllt.

3. Die Fibonacci-Zahlen

Die Fibonacci-Zahlen sind eine berühmte Zahlenfolge. Sie beginnt mit 1 und 1, und jede weitere Zahl ist die Summe der beiden vorherigen Zahlen. Die Folge lautet also:

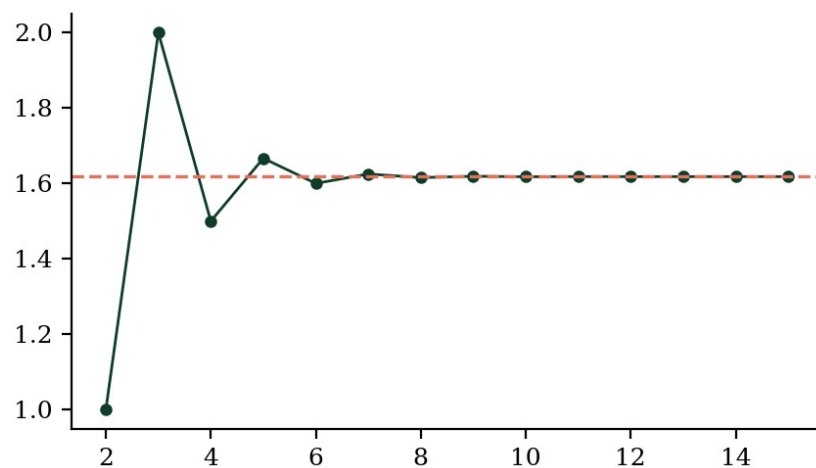
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots$$

Wenn man immer eine Fibonacci-Zahl durch ihren Vorgänger teilt, bekommt man die folgenden Werte:

n	F(n)	F(n)/F(n-1)
2	1	1.000000

n	F(n)	F(n)/F(n-1)
3	2	2.000000
4	3	1.500000
5	5	1.666667
6	8	1.600000
7	13	1.625000
8	21	1.615385
9	34	1.619048
10	55	1.617647
11	89	1.618182
12	144	1.617978
13	233	1.618056
14	377	1.618026
15	610	1.618037

Man sieht in der Tabelle sehr gut, dass die Quotienten immer näher an den Goldenen Schnitt herankommen. Das kann man auch in einem Diagramm darstellen:



Abbildung

Die Quotienten pendeln um den Goldenen Schnitt herum und werden immer genauer. Es gibt auch eine Formel, mit der man jede Fibonacci-Zahl direkt ausrechnen kann, ohne alle vorherigen zu kennen:

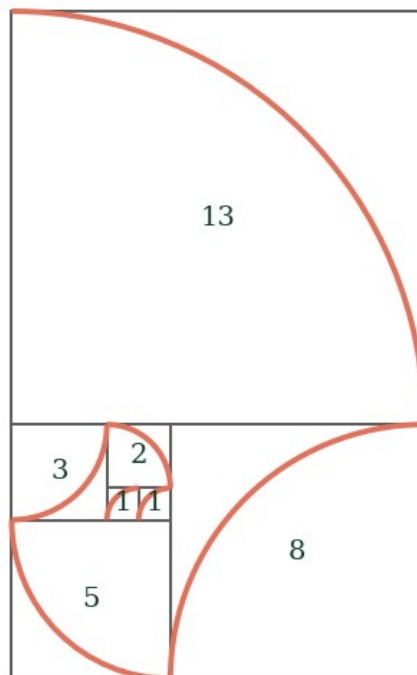
$$F(n) = (\Phi^n - (1-\Phi)^n) / \sqrt{5}$$

Diese Formel heißt Formel von Binet. Man sieht darin sehr schön, dass der Goldene Schnitt und die Fibonacci-Zahlen zusammengehören.

4. Der Goldene Schnitt in Natur und Kunst

Der Goldene Schnitt kommt an vielen Stellen in der Natur vor. Bei der Sonnenblume sind die Kerne in Spiralen angeordnet, und die Anzahl der Spiralen ist fast immer eine Fibonacci-Zahl, zum Beispiel 34 und 55. Auch bei Tannenzapfen und Ananas findet man Fibonacci-Zahlen.

Sehr bekannt ist auch die goldene Spirale. Man zeichnet sie, indem man Quadrate mit den Seitenlängen der Fibonacci-Zahlen aneinanderlegt und in jedes Quadrat einen Viertelkreis einzeichnet:



Die goldene Spirale

Diese Spirale findet man zum Beispiel beim Gehäuse des Nautilus wieder. In der Kunst und Architektur wurde der Goldene Schnitt ebenfalls oft verwendet. Der Parthenon in Athen soll nach dem Goldenen Schnitt gebaut sein, und auch bei der Mona Lisa von Leonardo da Vinci findet man goldene Rechtecke. Viele Künstler benutzen den Goldenen Schnitt, weil er als besonders harmonisch empfunden wird.

5. Fazit

Der Goldene Schnitt ist eine faszinierende Zahl. Ich habe gezeigt, wie man ihn aus einer quadratischen Gleichung berechnet, und dass er eng mit den Fibonacci-Zahlen zusammenhängt. Außerdem habe ich einige Beispiele aus der Natur und der Kunst vorgestellt.

Das Thema hat mir sehr viel Spaß gemacht und ich habe viel Zeit in diese Arbeit investiert. Ich finde es beeindruckend, dass eine einzige Zahl in so vielen unterschiedlichen Bereichen auftaucht. Mathematik ist wirklich überall.

6. Quellen

https://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt

<https://www.mathe-online.at>